2.1. Macierze. Pojęcia ogólne

Definicja 2.1. *Macierzą liczbową rzeczywistą* o wymiarze $m \times n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, nazywamy układ $m \cdot n$ liczb rzeczywistych zapisanych w postaci tablicy prostokątnej, która zawiera m wierszy i n kolumn.

Zazwyczaj macierze oznaczamy dużymi literami alfabetu, na przykład A, B lub $A_{m\times n}$, $B_{k\times s}$, gdy trzeba zaznaczyć wymiar macierzy. Więc macierz o wymiarze
$m \times n$ ma postać

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Liczby a_{ij} nazywamy *elementami macierzy*. Macierz A o elementach a_{ij} będziemy również oznaczali $A = \left[a_{ij}\right]$ lub $A_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

Definicja 2.2. Ciąg elementów

$$\{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\}$$

wybranych z macierzy (2.1) nazywamy *i-tym wierszem* macierzy A.

Definicja 2.3. Ciąg elementów

$$\{a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}\}$$

wybranych z macierzy (2.1) nazywamy *j-tą kolumną* macierzy A.

Definicja 2.4. Macierze $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ o tych samych wymiarach $m \times n$ nazywamy równymi, jeżeli $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Określimy teraz działania algebraiczne na macierzach (suma, iloczyn przez liczbę, iloczyn). Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami o tych samych wymiarach $m \times n$.

Definicja 2.5. *Sumą macierzy* A *i* B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ i oznaczamy $C = A + B$**,** elementy której są sumą odpowiednich elementów macierzy A i B, tzn.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

dla każdego $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Przykład 2.1. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 7 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $A + B$.

Rozwiązanie.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 7 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & 3+1 & -1+(-1) & 5+(-3) \\ 7+0 & -4+4 & 0+2 & -1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Suma macierzy o różnych wymiarach nie jest określona.

Definicja 2.6. *Iloczynem macierzy* A *i liczby* λ nazywamy macierz $D=\lambda A$**,** elementy której określone są wzorem

$$d_{ij}=\lambda a_{ij}$$

dla każdego $i\in\{1,2,\ ...,m\}$, $j\in\{1,2,\ ...,n\}$.

Przykład 2.2. Niech

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -6 & 0\\ 5 & 4 & 9 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Obliczyć $A-B$ i $A+2B$.

Rozwiązanie.

$$A-B=A+(-1)B=\begin{bmatrix}2 & -2 & -6 & 0\\ 5 & 4 & 9 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 0 & 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2 & -2 & -6 & 0\\ 5 & 4 & 9 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-1)\cdot 3 & (-1)\cdot 2 & (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot 5\\ (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot 2 & (-1)\cdot 3\\ (-1)\cdot 5 & (-1)\cdot 8 & (-1)\cdot 0 & (-1)\cdot 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2-3 & -2-2 & -6-1 & 0-5\\ 5-1 & 4-1 & 9-2 & -4-3\\ 1-5 & 1-8 & 1-0 & 2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -7 & -5\\ 4 & 3 & 7 & -7\\ -4 & -7 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

$$A+2B=\begin{bmatrix}2 & -2 & -6 & 0\\ 5 & 4 & 9 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 5 & 8 & 0 & 2\end{bmatrix}=$$

$$A+2B=\begin{bmatrix}2 & -2 & -6 & 0\\ 5 & 4 & 9 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 5\\ 2\cdot 1 & 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 5 & 2\cdot 8 & 2\cdot 0 & 2\cdot 2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2+6 & -2+4 & -6+2 & 0+10\\ 5+2 & 4+2 & 9+4 & -4+6\\ 1+10 & 1+16 & 1+0 & 2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 2 & -4 & 10\\ 7 & 6 & 13 & 2\\ 11 & 17 & 1 & 6\end{bmatrix}.$$

Niech $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ i $B=[b_{ij}]_{p\times n}$. Liczba kolumn p macierzy A równa się liczbie wierszy macierzy B
.

Definicja 2.7. *Iloczynem macierzy* A *i* B nazywamy macierz $C=A\cdot B$ o wymiarze $m\times n$**,** tzn. $C=[c_{ij}]_{m\times n}$**,** elementy której określone są wzorem

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

dla każdego $i\in\{1,2,\ ...,m\}$, $j\in\{1,2,\ ...,n\}$.

Uwaga. Iloczyn $A\cdot B$ nie jest określony, jeżeli liczba kolumn macierzy A nie równa się liczbie wierszy macierzy B.

Przykład 2.3. Niech

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ 1 & -4 & -2\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Obliczyć $A\cdot B$.

Rozwiązanie. Macierz A ma wymiar 2×3 oraz B ma wymiar 3×2. Liczba kolumn $p=3$ macierzy A równa się liczbie wierszy macierzy B. Więc iloczyn $A\cdot B$ jest określony i mamy

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ 1 & -4 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot 3+(-2)\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 0+(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\\ 1\cdot 3+(-4)\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 1\cdot 0+(-4)\cdot(-1)+(-2)\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 2.1. Iloczyn macierzy ma następujące własności:

1) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$;

2) $(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)=\lambda(A\cdot B)$, gdzie $\lambda\in\mathbb{R}$;

3) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

4) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

Oczywiście zakładamy, że w powyższych równościach iloczyny odpowiednich macierzy są określone.

Definicja 2.8. *Macierzą transponowaną* do macierzy $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierz $B=[b_{ij}]_{n\times m}$, której elementy określone są wzorem

$$b_{ij}=a_{ji}$$

dla każdego $i\in\{1, 2, ..., m\}$, $j\in\{1, 2, ..., n\}$.

Inaczej mówiąc, macierz transponowaną otrzymamy, jeżeli zamienimy wszystkie wiersze macierzy A na kolumny zachowując ich kolejność. Macierz transponowaną do A oznaczamy przez A^T.

Przykład 2.4.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 7\\ 2 & -2 & 0 & -2\end{bmatrix}, \qquad A^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\\ -1 & 0\\ 7 & -2\end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 2.2. Działanie transponowania macierzy ma następujące własności:

1) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

2) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$, gdzie $\lambda\in\mathbb{R}$;

3) $\left(A^T\right)^T=A$;

4) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Definicja 2.9. *Macierzą zerową* nazywamy macierz $A=[a_{ij}]_{n\times m}$, w której wszystkie elementy są zerami, tzn. $a_{ij}=0$ dla każdego $i\in\{1, 2, ..., m\}$, $j\in\{1, 2, ..., n\}$.

Macierz zerową oznaczamy przez O. Oczywiście, dla każdej macierzy A odpowiedniego wymiaru mamy

$$A+O=O+A, \quad A-A=O, \quad A\cdot O=O, \quad O\cdot A=O.$$

Definicja 2.10. *Macierzą kwadratową stopnia* n nazywamy macierz postaci (2.1), w której $m=n$.

Uwaga. Dla dwóch macierzy kwadratowych tego samego stopnia iloczyn macierzy jest zawsze określony. Jednak, ogólnie mówiąc, iloczyn macierzy kwadratowych nie jest przemiennym, tzn. $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Przykład 2.5. Niech

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 3+1\cdot 1 & 2\cdot 0+1\cdot(-1)\\ 1\cdot 3+0\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 2+0\cdot 1 & 3\cdot 1+0\cdot 0\\ 1\cdot 2+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Definicja 2.11. Ciąg elementów

$$\{a_{11},\, a_{22},\, ...,\, a_{nn}\}$$

wybranych z macierzy kwadratowej stopnia n postaci (2.1) nazywamy *przekątną główną* macierzy A.

Definicja 2.12. *Macierzą diagonalną* nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy poza przekątną główną są zerami, tzn. macierz postaci

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Jeżeli w macierzy diagonalnej $a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=\lambda$, to macierz (2.2) nazywa się *macierzą stałą*

Definicja 2.13. *Macierzą jednostkową stopnia* n nazywamy macierz stałą, w której $\lambda=1$, tzn.

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej macierzy kwadratowej stopnia n i macierzy jednostkowej (2.3) prawdziwe są równości

$$A\cdot I=I\cdot A=A. \tag{2.4}$$

Definicja 2.14. *Macierzą trójkątną górną (dolną) stopnia* $n>1$ nazywamy macierz, w której wszystkie elementy stojące pod (nad) główną przekątną są równe zeru, tzn. macierze postaci

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Przykład 2.6. Macierze

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

są macierzami trójkątnymi odpowiednio górną stopnia 2 i dolną stopnia 3.

2.2. Wyznaczniki

Każdej macierzy kwadratowej można w sposób jednoznaczny przyporządkować liczbę rzeczywistą zwaną wyznacznikiem macierzy. Więc wyznacznik jest funkcją liczbową określoną na zbiorze wszystkich macierzy kwadratowych dowolnego stopnia. Wyznacznik macierzy A oznaczamy przez $\det A$, $|A|$ lub

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Podamy definicje wyznacznika w sposób indukcyjny względem stopni macierzy. Dla macierzy stopnia $n = 1$, tzn. $A = [a_{11}]$, wyznacznik definiujemy w sposób następujący

$$|A| = \det[a_{11}] = a_{11}.$$

Definicja 2.15. *Wyznacznikiem macierzy stopnia* $n = 2$ nazywamy liczbę

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2.5}$$

Przykład 2.7. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 2,$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 = -3.$$

Definicja 2.16. *Wyznacznikiem macierzy stopnia* $n = 3$ nazywamy liczbę

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{2.6}$$

Zaznaczmy, że wzór (2.6) można łatwo otrzymać stosując tak zwany schemat Sarrusa. Ten sposób obliczenia wyznacznika stopnia 3 polega na następujących czynnościach. Dopisujemy pod szukanym wyznacznikiem dwa pierwsze wiersze nie zmieniając ich kolejności, a następnie przemnażamy elementy wzdłuż przekątnych i sumujemy iloczyny z odpowiednimi znakami jak wskazano na poniższym rysunku.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \\ - & & & & + \end{array}$$

Przykład 2.8. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 0 - 3\cdot(-1)\cdot 1 - 0\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 0\cdot 2 = 19.$$
$$\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Uwagę. Regułę Sarrusa nie można stosować do obliczenia wyznaczników innych stopni.

Definicja 2.17. *Minorem* M_{ij} *(podwyznacznikiem) odpowiadającym elementowi* a_{ij} macierzy kwadratowej A stopnia n nazywamy wyznacznik utworzony z wyznacznika macierzy A przez usunięcie i-ego wiersza oraz j-tej kolumny (tzn. wiersz i kolumnę na przecięciu których znajduje się element a_{ij}).

Przykład 2.9. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.7)}$$

minorami M_{11}, M_{21}, M_{32} są wyznaczniki:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Definicja 2.18. *Dopełnieniem algebraicznym* A_{ij} *elementu* a_{ij} macierzy kwadratowej A stopnia n nazywamy wyrażenie

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}. \qquad (2.8)$$

Przykład 2.10. Dla macierzy *(2.7)*

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie 2.3 (Laplace'a). Wyznacznik macierzy A stopnia n jest równy sumie iloczynów każdego elementu i-tego wiersza (lub j-tej kolumny) i jego dopełnienia algebraicznego, tzn.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad 1 \le i \le n \tag{2.9}$$

lub

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad 1 \le j \le n. \tag{2.10}$$

Z twierdzenia Laplace'a wynika, że wyznacznik macierzy dowolnego stopnia n można znaleźć obliczając n wyznaczników stopnia $n-1$ (dopełnienia algebraiczne) i podstawiając do wzoru (2.9) lub (2.10). Inaczej mówiąc, stosując twierdzenia Laplace'a obliczanie wyznacznika macierzy dowolnego stopnia n można sprowadzić do obliczania wyznaczników stopnia 3 lub 2 (wzory (2.6), (2.5)). Zatem twierdzenie Laplace'a można również traktować jako definicją wyznacznika stopnia $n \ge 2$.

Przykład 2.11. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Stosując wzór (2.9) względem drugiego wiersza ($i = 2$) mamy

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 8\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(1\cdot 0\cdot 5 + 0\cdot 7\cdot 4 + 4\cdot 3\cdot 2 - 4\cdot 0\cdot 4 - 2\cdot 7\cdot 1 - 5\cdot 3\cdot 0) +$$
$$+ 8\cdot(1\cdot 0\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot 0 - 3\cdot 0\cdot 4 - 0\cdot 4\cdot 1 - 7\cdot 1\cdot 3) = 100.$$

Zwróćmy uwagę na to, że wartość wyznacznika nie zależy od wiersza (kolumny) względem którego stosujemy wzór (2.9) (lub (2.10)). Więc praktycznie dla ułatwienia obliczeń warto wybierać wierz (kolumnę) z największą ilością zerowych elementów.

Obliczanie wyznacznika dużego stopnia wymaga w ogólnym przypadku dokonania dużej ilości mnożeń. Jednak można znacznie uprościć obliczanie wyznaczników korzystając z ich własności. Wymienimy najważniejsze własności wyznaczników.

Twierdzenie 2.4. Jeżeli A^T jest macierzą transponowaną do macierzy kwadratowej A, to

$$|A^T| = |A|.$$

Z tego twierdzenia wynika, że wszystkie własności wyznaczników sformułowane dla wierszy dotyczą również kolumn i na odwrót.

Twierdzenie 2.5. Jeżeli macierz A ma zerowy wiersz (kolumnę), to $|A| = 0$.

Twierdzenie 2.6. Jeżeli macierz A ma dwa jednakowe wiersze (dwie kolumny), to $|A| = 0$.

Twierdzenie 2.7. Jeżeli macierz B została utworzona z macierzy A przez zamianę miejscami dwóch wierszy (kolumn), to $|B| = -|A|$.

Twierdzenie 2.8. Jeżeli macierz B została utworzona z macierzy A przez pomnożenie wszystkie elementy i-tego wiersza (k-tej kolumny) przez liczbę λ, to

$$|B| = \lambda\cdot|A|.$$

Twierdzenie 2.9. Jeżeli i-ty wiersz macierzy C jest sumą i-tego wiersza macierzy B i i-tego wiersza macierzy B, a pozostałe wiersze macierzy A, B, C są jednakowe, to

$$|C| = |A| + |B|.$$

Przykład 2.12.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie 2.10. Jeżeli macierz B została utworzona z macierzy A przez dodanie do elementów dowolnego wiersza (kolumny) odpowiadających im elementów innego wiersza (kolumny) pomnożonych przez dowolną liczbę, to $|B| = |A|$.

Przykład 2.13.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1\cdot 2+4 & 6 \\ 2 & 2\cdot 2+5 & 9 \\ 3 & 3\cdot 2+6 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 9 & 9 \\ 3 & 12 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Twierdzenie 2.11. Jeżeli macierz A jest macierzą trójkątną górną (dolną) stopnia $n > 1$, to

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Wniosek. Jeżeli macierz A jest macierzą diagonalną postaci (2.2), to

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Twierdzenie 2.12 (Cauchy'ego). Wyznacznik iloczynu macierzy kwadra-towych stopnia n jest równy iloczynowi wyznaczników tych macierzy, tzn.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|. \qquad (2.11)$$

Przykład 2.14. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{bmatrix}.$$

Mamy

$$|A| = a^2 + b^2, \quad |B| = c^2 + d^2, \quad |A \cdot B| = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

Więc korzystając ze wzoru (2.11) otrzymamy tożsamość:

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch